Глава 14. Зачем плавно?

Я вернулся после перерыва в 9 лет. Время летит, не так ли? Последняя глава которую я опубликовал, имела номер 12, и с используемой мной нумерацией главы 13 нет.

После такого долгого перерыва полезно бы было повториться о целях и задачах цикла статей «Физика гонок». Я физик. Ещё я принимаю активное участие в мотоспорте. Для меня было бы почти невозможно не использовать мои профессиональные знания и умения в моем хобби. Поэтому я иногда задумывают о физике гоночных автомобилей.

Больше всего в этом меня привлекает делать полностью оригинальный анализ, который не представляет собой сложный инженерный анализ. Вы можете посмотреть примеры таких инженерных анализов в книгах Фреда Пуна, Вильяма Милликена и Кэрролла Смита ну и у многих других авторов. Я хочу найти голые физические факты, которые стоят за инженерным анализом, но рискую при этом пропустить некоторые детали. Я анализирую вещи с нуля по следующим причинам:

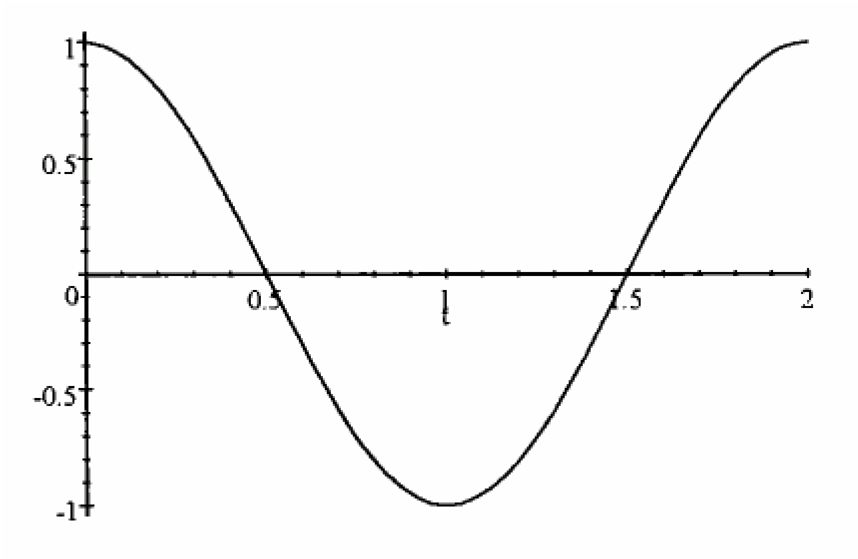
- Я хочу более глубокого понимания, что может следовать только из понимания самых основных(первичных) принципов;
- посмотреть ответ где-нибудь это для меня не интересно;
- Я надеюсь принести свежие идеи в уже существующие вещи

В 1990, один из моих знакомых автокроссеров попросил меня вести ежемесячную колонку в Вестнике SCCA CalClub (SCCA CalClub newsletter). После получения множества хороших отзывов я опубликовал написанные статьи в Internet через Team Dot Net. Тогда Интернет был по-настоящему небольшой, поэтому можно считать, что я просто поделился статьями с другими автокроссерами. С тех пор Интернет стал очень большим, и мои статьи начали самостоятельную жизнь. Я получил тысячи писем от довольных читателей со всего мира и несколько гневных писем (главным образом по статье №4, понятно по какой причине).

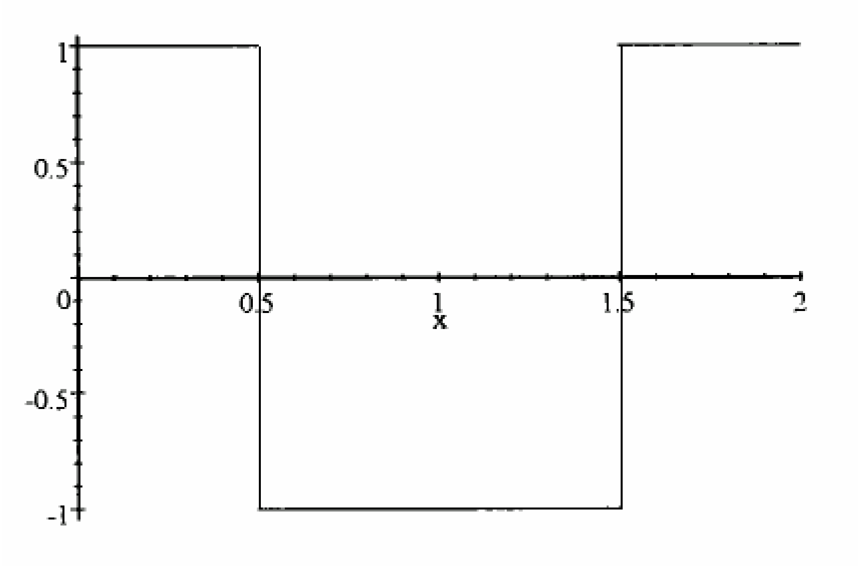
Итак, вернемся к физике. В этом месяце я бы хотел рассмотреть с самых основ, почему так важно управлять плавно гоночным автомобилем. «Плавно» для меня означает избегать рывков, толчков, при использовании газа, тормоза, или при рулении. Очень важно избегать рывков, как в конце маневра, так и в начале. Для примера при рулении вы не только должны начинать поворачивать руль постепенно, но и постепенно останавливать вращение руля. Кроме того, когда вы поворачиваете руль обратно, вы также должны плавно начинать и заканчивать движение рулем. Так полный маневр поворота состоит из четырех плавных действий начала и окончания вращения руля. Полное действие торможения состоит из четырех небольших мини- действий: по одному для начала и окончания надавливания педали и ещё два для начала и окончания отпускания педали. То же самое и для педали газа.

Хорошо, великолепно, но зачем? На первый взгляд, кажется, что возможно быстрей ускорится, нажав педаль резко или быстрей войти в поворот, рывком прокручивая руль. Более того, если мы допустим, что плавность важна, нет ли из здесь исключений? Есть ли ситуации когда лучше будет, ударить по педали или дернуть руль? Насколько плавно нужно управлять? Плавность означает замедление действий органами управления. Очевидно, что можно управлять настолько плавно, чтобы быть недостаточно быстрым и не использовать все возможности машины.

Давайте сначала выясним «зачем». Люди близкие к технике обычно используют свои технические термины для общепринятых слов и явлений. Так, одним из физически точных значений слова «плавно» будет словосочетание «по синусоиде» Синусоида это кривая которая выглядит вот так:



Если мы примем, что угол поворота руля будет пропорционален вертикальной оси Y, а по оси X будет отложено время, то эта картинка будет описывать действительно плавное руление в одну сторону на первой секунде и в другую сторону на второй. Фактически, здесь вы можете увидеть те четыре мини действия, о которых упоминалось выше в виде возвышений или провалов кривой. Итак, вопрос «зачем» в техническом выражении будет звучать «почему управление как на этой кривой будет лучше, чем управление как на нижеприведенной ступенчатой кривой».



Вот ответ: управление по синусоиде лучше, поскольку это соответствует естественной реакции машины! Подвеска автомобиля и шины работают как колебательная система - затухающий гармонический осциллятор (ЗГО). ЗГО может быть в трех состояниях недодемпфированным, чрезмерно демпфированным или критически демпфированным[3]. Недодемпфированная система будет иметь плохой демпфер, в случае машины это будут амортизаторы. Движение недодемпфированной системы будет выглядеть как синусоида. Мы все видели машины с плохими амортизаторами раскачивающиеся вверх и вниз на пружинах.

[3] Коэффициенты затухания <1, >1 и 1 соответственно

В критически демпфированной или чрезмерно демпфированной системе совершается только одно колебание, поскольку демпфер будет препятствовать продолжению колебаний, но даже в этом случае единственное колебание будет иметь синусоидальный вид.

Наиболее важный параметр ЗГО это его частота. В недодемпфированном осцилляторе частота будет соответствовать количеству колебаний за единицу времени. В критически демпфированном и чрезмерно демпфированном осцилляторе частота будет соответствовать резонансной частоте всей системы (частоте свободных колебаний). Другими словами если частота движений будет совпадать с резонансной частота, то машина будет работать с максимально быстрой реакцией. Если движения будут происходить чаще, они будут слишком быстрыми и ЗГО их не сможет затушить и восстановиться перед обратным движением. Если движения будут медленнее, то ЗГО их затушит и в зависимости от дальнейших действий либо будет находится в состоянии покоя либо начнет колебание в другую сторону.

Итак собственно итог: для того чтобы получить максимально быстрый отклик машины при рулении, торможении или разгоне используйте синусоидальную форму воздействия на органы управления с частотой которая будет соответствовать резонансной частоте машины. Если вы будете управлять резче, то системе будет сообщаться избыточная энергия, которую система сможет рассеять только на более низких частотах. Используя органы управления с той частотой и формой, которые резонансной (свободной) реакции машины, Вы заставляете машину делать то, что она на самом деле сможет сделать с максимально возможной скоростью. Если Вы заставляете машину делать что-то рывками, то машина будет колебаться возле заданного положения, рассеивая избыточную энергию, то есть будет идти не с максимальным сцеплением и тратить энергию на колебания подвески. Но есть и исключения. Если передние шины уже скользят то пилот может вернуть сцепление быстрым движением руля выводя колеса на траекторию движения. Быстрый удар по педали газа с выжатым сцеплением для того чтобы совместить обороты двигателя и КПП на переключении вниз это тоже обычная практика. Но когда машина в сцеплении получить максимальную отдачу от органов управления можно только используя эти органы с частотой отвечающей соответствующим осцилляторам в системах рулевого управления, торможения и газа.

Итак теперь мы знаем физику которая стоит за этими явлениями. Обратимся к математике.

Как будет показано ниже частота будет равна $\omega = \pm\sqrt{k/m}$. Где k это жесткость пружин обычно измеряемая в Н/м, а m это подпружиненная масса, измеряемая в кг.

Предположим наши пружины имеют жесткость 175 кН/м и поддерживают вес 362 кг на одном углу машины. Получим собственную частоту системы около 4 Гц. Это соответствует нашему опыту и тому, что нам подсказывает интуиция. Если надавить на угол машины с неисправнымыи амортизаторами то она будет раскачиваться несколько раз в секунду, не очень быстро и не очень медленно. Также мы можем увидеть, что частота имеет квадратичную зависимость от жесткости пружины. Это означает, что удваивание частоты, скажем до 8 колебаний в секунду, будет соответствовать учетверению жесткости пружин до 700 кН/м или уменьшению в 4 раза веса до 90 кг. [Мой друг, Брэд Хаас (Brad Haase) указал, что 4Гц это слишком много для реальной машины. Я ему ответил, что эта работа о фундаментальной теории и содержит только приблизительные расчеты. Тем не менее, он заметил «можешь ты представить 4Гц слалом?». Я вынужден был признать, что 4Гц кажется очень быстрым, но я не мог объяснить разницу. Бред, указал мне на то, что рычаги подвески уменьшают эффективную жесткость пружин и сослался на тему «установочное отношение» (installation ratio) в книге Милликена «Динамика гоночного автомобиля» (Milliken, Race Car Vehicle Dynamics). С тех пор я не ознакомился с этой книгой и могу только отослать Вас к ней. Тем не менее, интуиция подсказывает, что 1 Гц гораздо больше соответствует действительности, и тем самым эффективная жесткость пружин будет 175 / 16 = 11 кН/м.

Как мы получили формулу для расчета частоты? Давайте проделаем последовательность приближений поэтапно. Выполняя расчеты последовательно, мы можем проверить более детальные расчеты на предмет ошибок. Они не будут очень сложны. Первое допущение в наших расчетах это отсутствие амортизатора. Наша модель представляет собой колесо с неисправным амортизатором, когда некоторая масса покоится поддерживаемая пружиной.

Пускай подпружиненная масса будет m. Сила тяжести будет воздействовать на неё вниз с величиной mg, где g ускорение силы тяжести 9,8 м/с^2. Сила пружины воздействует на массу вверх с величиной $k(y_0-y)$, где k это жесткость пружины, а $(y-y0)$ это величина проседания пружины от свободного состояния (в формуле используется обратная формула для того чтобы учесть что сила будет всегда с противоположным знаком, действуя в направлении обратном деформации). Мы можем упростить наши расчеты, приняв координатную систему, в которой $y_0 = 0$. Такого рода хитрости очень полезны в физике, даже в очень сложной.

Нет ничего плохого в том, что наша модель не учитывает амортизаторы, вес колеса и вес самой пружины. Вес колеса называется неподрессоренным (неподпружиненым). Вес самой пружины частично подпружинен. Мы не будем учитывать эти обстоятельства в этой главе. Сегодня мы только учтем влияние амортизаторов.

Далее нам снова понадобится первый закон ньютона. Общая сила действующая на массу это $-ky - mg$. Масса умноженная на ускорение это $m(dv_y/dt) = m(d^2y/dt)$, где v_y это вертикальная скорость перемещения массы и dv_y/dt это ускорение. Эта скорость в свою очередь, это скорость изменения y координаты подпружиненного тела, то есть $v_y = (dy/dt)$. Поэтому ускорение это вторая производная изменения y и мы можем её записать d^2y/dt^2, также как это впервые записали Ньютон и Лейбниц 350 лет назад. Теперь у нас есть следующее уравнение динамики нашего подпружиненного тела.

$$F = ma = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - mg$$

Давайте разделим всё уравнение на m и перенесем все члены влево

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y + g = 0$$

С учетом

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Запишем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + g = 0$$

Нам нужно решить это уравнение для y как фунции времени. Давайте предположим

$$y = A + Be^{C\omega t}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = C\omega Be^{C\omega t} = C\omega(y - A)$$

И

$$\frac{d^2y}{dt^2} = C\omega\frac{dy}{dt} = (C\omega)^2(y - A)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + g = (C\omega)^2 y - A(C\omega)^2 + \omega^2 y + g \\
&= \omega^2(C^2 + 1)y - (A(C\omega)^2 - g) \\
&= 0 \Leftrightarrow C^2 = -1 \;\; and \;\; A = -g/\omega^2
\end{aligned}$$

Итак, возможны два решения $y(t) = A + B_1e^{i\omega t}$ и $y(t) = A + B_2e^{-i\omega t}$. Фактически, зависимые от времени части этих выражений могут действовать одновременно, поэтому мы можем для общего случая записать $y(t) = A + B_1e^{i\omega t} + B_2e^{-i\omega t}$. Значения B_1 и B_2 определяются двумя начальными условиями, то есть величинами $y_0 = A + B_1 + B_2$ и $(dy/dt)(0) = i\omega(B_1 - B_2)$.

Давайте избавимся от комплексных чисел и запишем:

$$\begin{aligned}
&B_1e^{i\omega t} + B_2e^{-i\omega t} = B_1(\cos\omega t + i\sin\omega wt) + B_2(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\
&= (B_1 + B_2)\cos\omega t + i(B_1 - B_2)\sin\omega t \\
&= C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t
\end{aligned}$$

С учетом этого упростим начальные условия:

$$y(0) = C_1; \;\; v_y(0) = \omega C_2$$

Теперь просто ввести амортизатор. Амортизирующая сила пропорциональна скорости, поэтому пока нет движения, нет и амортизирующей силы. Каждое колесо приблизительно можно описать следующим выражением:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{dy}{dt} + \omega^2 y + g = 0$$

Где $\omega^2 = k/m$ и $\gamma = \delta/m$.

Если

$$y = A + Be^{C\omega t}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = C\omega B e^{C\omega t} = C\omega(y - A)$$

И

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = C\omega \frac{dy}{dt} = (C\omega)^2 (y - A)$$

Отсюда

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \omega^2 y + g = (C\omega)^2 (y - A) + C\gamma\omega(y - A) + \omega^2 y + g$$
$$= ((C^2 + 1)\omega + C\gamma)\omega y - (AC\omega(C\omega + \gamma) - g)$$
$$= 0 \Leftrightarrow \omega C^2 + \gamma C + \omega = 0 \ \ and \ \ AC\omega(C\omega + y) = g$$

Для решения квадратных уравнений мы помним формулу $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. Это дает нам ответ для *C*:

$$C = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2\omega}$$

Я оставлю простую арифметику для *A* и для начальных условий читателю. При $\gamma = 2\omega$ система будет критически демпфированной, при $\gamma > 2\omega$ чрезмерно демпфированной и при $\gamma < 2\omega$ система будет недодемпфированной. В недодемпфированной системе *C* будет иметь мнимую составляющую и экспоненциальные колебания. В остальных случаях после импульса система будет совершать только одно колебание, и приходить в состояние покоя.

Для любого, кто разобрался в этой математике, будет интересно построить несколько кривых и проверить мои расчеты. Если Вы найдете ошибку, пожалуйста, сообщите мне (я, как обычно, сделал все расчеты сам).

Можно улучшить это описание, используя системы уравнений, которые будут описывать все 4 колеса вместе. Но тогда бы было намного больше математики без улучшения физической основы, из которой следует, что плавное управление будет более предсказуемо, а управление рывками будет менее предсказуемо. Другое улучшение, которое можно сделать, это добавить неподрессоренные и частично подрессоренные веса.