

Глава 17. «Медленно заходим, быстро выходим» или расширенный анализ гоночной траектории

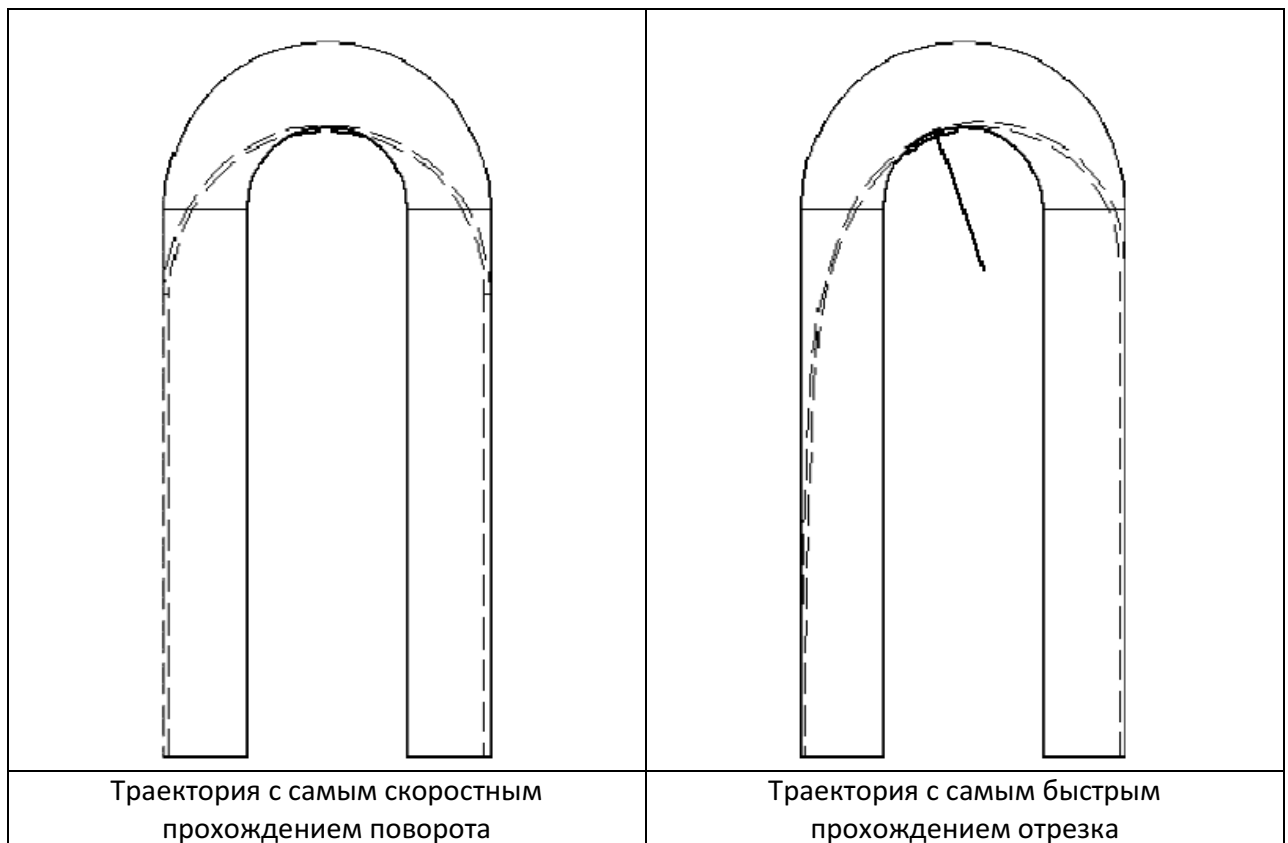
Возможно вы помните главу 5 где мы проделали некоторые простые расчеты для того чтобы показать, что классическая гоночная траектория в 90 градусном повороте лучше чем широкая или узкие траектории. Лучшая – означает с самым меньшим временем прохождения. В этой главе под «классической траекторией» подразумевается самая широкая траектория, вписанная в трек.

Здесь и дальше в Физике Гонок мы будем поднимать планку ещё выше. Мы проведем не только расчет времени прохождения по всем траекториям в повороте, но и покажем новый вид анализа для выхода, который принимает во внимание одновременно и ускорение и возврат рулевого колеса после апекса. Этот вид анализа позволит нам найти меньшее время прохождения, потому что мы не сможем рассчитать это время напрямую. Мы применим приближенный круг сцепления из части 7 чтобы учесть ограничения физической модели машины. Мы также смоделируем более сложный сегмент трассы, чем в 5 части, который будет включать важную прямую на выходе где будет видно преимущество, получаемое при увеличении скорости выхода из поворота.

Основная цель анализа это вернуться к старой мантре «медленно входим, быстро выходим» Мы найдем самый быстрый путь через сегмент который не подразумевает самую скоростную траекторию непосредственно в повороте. Более того, мы получим меньшее время при более медленном прохождении поворота, так что мы сможем нажать на газ раньше. Всегда заманчиво пройти собственно поворот на большей скорости, но часто это не дает выгоды в контексте прохождения остальной трассы.

Этот анализ достаточно длинный и займет две части книги. В первой части, мы проведем расчет базовой траектории, которая представляет собой реальную траекторию, по которой мы будем двигаться до апекса и расчет макетной траектории после апекса. В следующей главе мы улучшим макетной траекторию путем учета ускорения и возврата руля.

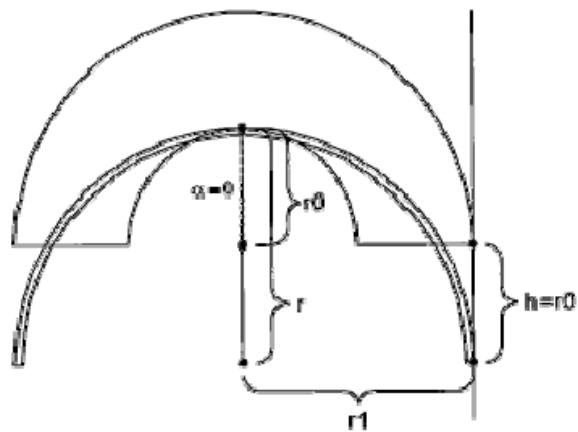
Давайте рассмотрим сегмент трека. Представим входную прямую длиной 200 метров, соединенную с 180 градусным левым поворотом с внешним радиусом 60 метров и внутренним радиусом 30 метров, в свою очередь соединенным на выходе с 200 метровой выходной прямой. На следующей схеме мы показали сегмент дважды с двумя различными траекториями. Траектория слева наиболее широкая с самым большим радиусом и тем самым обеспечивающая самое скоростное прохождение поворота. На схеме справа показана траектория с самым быстрым временем прохождения. Хотя скорость в повороте на ней ниже чем на траектории слева, она включает в себя более длинный отрезок ускорения по прямой и ускорения на выходе из поворота, что и дает быстрое время.



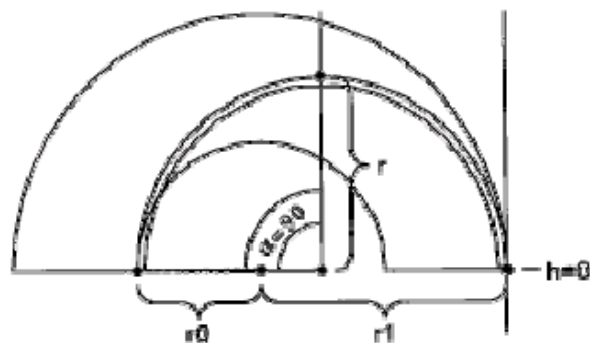
Отметим, что обе линии начинаются с самой правой точки вхождения в поворот. Это особенность всех поворотов, которые мы будем анализировать. Траектории с началом не в противоположном краю от поворота могут быть возможны при другом стечении обстоятельств, например при обгоне. Тем не менее, мы фокусируемся здесь на такой траектории как на наиболее очевидном способе уменьшить время. Также, мы игнорируем ширину машины, работая с двухколесной траекторией. Если бы мы учли ширину машины, мы бы получили тот же окончательный результат с внешним радиусом 60 без ~ 0.6 метра и внутренним радиусом 30 плюс ~ 0.6 метра.

Сначала мы рассчитаем точное время на трассе: входная прямая, торможение, прохождение поворота до апекса. Для того чтобы иметь траекторию для сравнения мы также сделаем расчет неоптимальной на выходе траектории которая будет включать в себя прохождение поворота без возврата руля и выход из поворота где то по центру трассы. В следующей главе Физики Гонок мы сравним траектории с более усложненным выходом, включающим одновременно ускорение и возврат руля для того чтобы использовать всю ширину трассы на выходе.

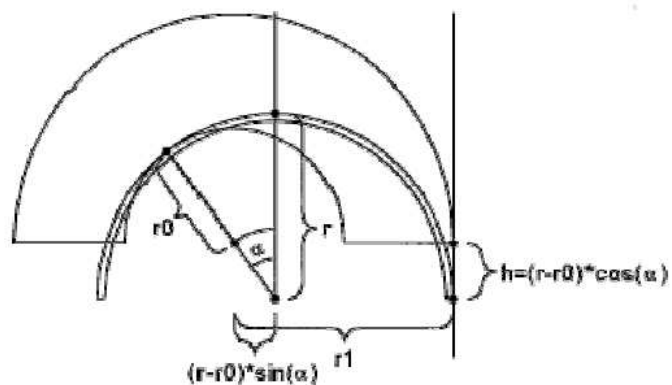
Предположим, что мы начинаем сегмент в правой части прямой на скорости 160 км/ч. Нам необходимо общее время прохождения поворота между двумя крайними траекториями. Большая крайняя траектория имеет радиус 60 метров, что соответствует внешнему радиусу трека. Должно быть, очевидно, что невозможно ехать по окружности с радиусом большим, чем 60 метров и при этом оставаться на трассе. Изобразим этот крайний случай на схеме:



Введем несколько параметров, которые пригодятся в дальнейшем. Первое, назовем внешний радиус трека $r1$, очевидно, что он составляет 60 метров. Представляя его символом, мы делаем возможным изменить его численное значение в нужный момент. Подобно, назовем внутренний радиус трека $r0$, сейчас он равен 30 метрам. Обозначим символом r вписанную окружность, по которой мы хотим пройти поворот. В этом предельном случае r будет равна $r1$, 60 метрам. В другом крайнем случае с самым узким вписанным кругом r будет 45 метров, как показано на схеме.



Рассмотрим следующий рисунок показывающий что это такое h и α :



General Case, Including the Intermediate Case:
Line with Lowest Overall Time

h показывает точку где мы должны закончить торможение. Более точно h это расстояние точки поворачивания за геометрическим началом поворота. Её величина это $(r - r_0)\cos \alpha$. α это угол между геометрической вершиной, где вписанный круг (траектория) касается внутреннего края поворота и центром траектории. Мы видим две величины для горизонтального расстояния между центрами вписанного круга и внутренней кромкой, чья величина $(r-r_0)\sin \alpha$ и r_1-r . Это равенство позволяет нам составить уравнение для расчета α .

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{r_1 - r}{r - r_0} \right)$$

Следующая таблица показывает величины h и α для некоторого числа вписанных радиусов (отметим что меняя r_0 и r_1 мы получим гораздо большую таблицу значений). Пока попробуем менять только r /

Вписанный радиус, м	α , градусы	h , м.
45	90.0	0.0
46.0	73.9	4.3
46.3	67.4	6.1
46.6	62.5	7.5
46.9	58.4	8.6
47.2	54.9	9.6
48.8	41.8	13.6
50.3	32.6	16.7
51.8	25.4	19.3
53.3	19.5	21.6
54.9	14.5	23.6
56.4	10.2	25.5
57.9	6.4	27.3
59.4	3.0	28.9
60.0	0.0	30.5

Есть пара интересных вещей которые можно отметить в этой таблице. Во первых она согласуется с очевидными величинами $h=0$, $\alpha=90$ и $h=30.5$, $\alpha = 0$ когда $r = 45$ м и $r_1 = 60$ м. Это неплохая проверка на очевидные ошибки. Во вторых, изменения происходят очень быстро с изменением радиуса поворота, и этот факт это главная особенность гоночной траектории. *Пилотируя по траектории всего на 0,3 м больше радиусом можно попасть на апекс на 15 градусов позднее!*

У нас есть информация необходимая для расчета времени прохождения до апекса и после. Сначала давайте посчитаем скорость в повороте предполагая что наша машина может достигать бокового ускорения в $1g = 9,8 \text{ м/с}^2 = V^2/r$, получается $v = \sqrt{gr}$

Теперь когда, у нас есть максимальная скорость прохождения поворотов мы можем рассчитать какое расстояние нам потребуется для того чтобы затормозить со 160 км/ч. Давайте предположим что наша машина может тормозить с замедлением $1g$. Также мы знаем, что торможение вызывает небольшое уменьшение скорости через небольшой отрезок времени. Точней $dv/dt = g$. Тем не менее, нам необходимо знать как будет меняться скорость в зависимости от расстояния, а не от времени. Напомним что $dx/dt = v$, $dt = dx/v$, так мы можем получить $dx = v dv/g$. Те из вас кто помнит дифференциальное и интегральное исчисление тут же увидят что

$\Delta x = \frac{1}{2g}(v_1^2 - v_2^2)$ это необходимая формула для определения расстояния. В любой момент тормозной путь будет меняться как квадрат скорости, то есть как кинетическая энергия, что собственно интуитивно понятно. Тем не менее, есть множитель 2 который легко забыть (он берется из расчетов предельных уравнений типа $(v+dv)^2 \approx v^2 + 2vdv$).

Далее мы получим тормозной путь на входной прямой и также получим h , которые дадут нам расстояние, до которого мы сможем ехать 160км/ч перед торможением. Теперь нам нужно время, необходимое для торможения. Его посчитать просто: $\Delta t = \Delta v/g$. Остальные времена также просто рассчитать, так мы получим времена прохождения для различных траекторий прохождения поворота и различных апексов.

Вписанный радиус	Скорость прохождения поворота	Тормозной путь со 160км/ч	Расстояние по прямой до точки торможения	Время на прямой	Время на торможение	Время на прохождение поворота до апекса	Общее время прохождения трассы до апекса
м	км/ч	м	м	сек	сек	сек	сек
45	75.6	78.18	121.82	2.74	2.39	6.73	11.86
46.3	76.7	77.53	116.37	2.62	2.36	5.97	10.94
46.9	77.2	77.23	114.17	2.57	2.34	5.66	10.58
47.2	77.5	77.08	113.32	2.55	2.34	5.55	10.43
48.8	78.8	76.28	110.12	2.48	2.30	5.13	9.91
51.8	81.2	74.78	105.92	2.38	2.23	4.63	9.24
54.9	83.5	73.23	103.17	2.32	2.16	4.31	8.80
57.9	85.8	71.73	100.97	2.27	2.10	4.09	8.46
61	88.1	70.18	99.32	2.23	2.04	3.92	8.19

На первый взгляд, кажется, что самая широкая траектория намного быстрее, но мы должны понимать, что эти времена включают только путь до апекса, и время будет намного меньше для самой широкой траектории, где $\alpha=0$. Предположим, что мы будем выходить из поворота на постоянной скорости и затем ускоримся к выходу из поворота на $0.5g$. Это макетная траектория. В реальности мы не будем ехать по этой траектории, но нам это необходимо для получения времени прохождения отрезка. Очень просто посчитать оставшиеся неизвестные и составить следующую таблицу:

Вписанный радиус	Общее время прохождения трассы до апекса	Длина дуги, выхода из поворота после апекса	Время в повороте после апекса	Время на вход и прохождение поворота	Скорость на выходе с прямой	Время на выходной прямой	Общее время прохождения сегмента
м	сек	м	сек	сек	км/ч	сек	сек
45	11.86	0.00	0.00	11.86	174.55	5.67	17.528
46.3	10.94	18.26	0.86	11.80	172.57	5.528	17.329
46.9	10.58	25.87	1.21	11.78	171.88	5.46	17.242
47.2	10.43	28.91	1.34	11.78	171.62	5.43	17.208
48.8	9.91	41.05	1.88	11.78	170.72	5.308	17.093
51.8	9.24	58.40	2.59	11.83	169.76	5.116	16.951
54.9	8.80	72.34	3.12	11.92	169.29	4.955	16.873
57.9	8.46	84.48	3.54	12.01	169.07	4.813	16.818
61	8.19	95.82	3.92	12.11	169.00	4.682	16.787

Итак, мы видим что на выходной траектории самая широкая траектория будет самой медленной, но в общем по сегменту она будет самой быстрой. Самая широкая траектория будет иметь меньшее время прохождения:

- На входной прямой на полсекунды, потому что h будет больше и входная прямая будет короче для более широкой траектории
- На торможении на три десятых, потому что скорость прохождения поворота будет больше и потребуется меньшее по длительности торможение.
- На выходной прямой почти на секунду, опять потому что h большое и соответственно выходная прямая короче.

Самая широкая траектория имеет время хуже почти на секунду в повороте, поскольку траектория по окружности будет длинней. Когда мы сложим все составляющие, получится, что самая широкая траектория на 0.8 секунды быстрее, чем самая узкая, только за счет времени прохождения входных и выходных прямых. Напомним снова, что шаблонная траектория это не настоящая траектория выхода из поворота, но мы можем улучшить этот момент расчета. Всё что мы сделаем, это улучшим расчет части поворота после апекса и выходной прямой. Теперь у нас шаблонной траекторией будет траектория до апекса. Так, с этого момента нам необходима только вторая колонка последней таблицы, где мы видим почти трехсекундный разброс между самой медленной и самой быстрой траекторией и далее многое можно будет улучшить за счет учета ускорения и возврата руля на выходе из поворота.