Глава 18: «Медленно заходим, быстро выходим!» или расширенный анализ гоночной траектории, продолжение.

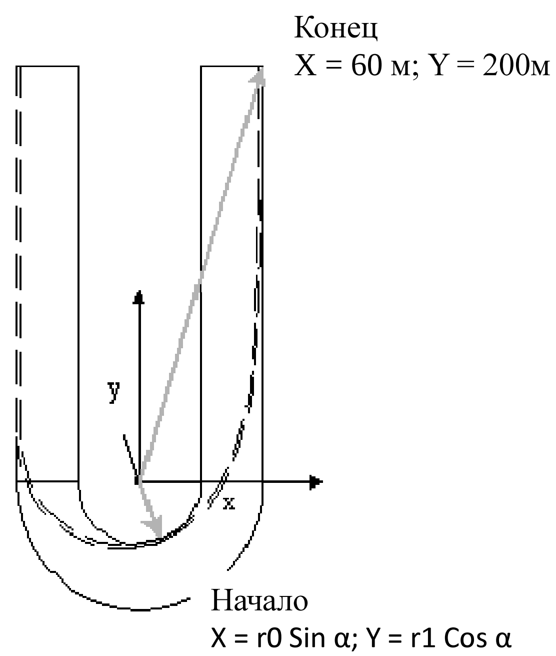
В предыдущей главе мы сделали точные расчеты для шаблонной траектории для 200 метровой входной прямой, 180 градусного левого поворота и 200 метровой выходной прямой. Радиус траектории меняется от 45 до 60 метров. Ширина дороги везде взята 30 метров. Рассчитанная шаблонная траектория предполагает постоянную скорость на протяжении всего поворота. Мы проделали эти расчеты для того чтобы получить времена для сравнения с более сложными расчетами из этой главы, в которой мы введем одновременные возврат руля и ускорение. Функция прохождения отрезка трассы в зависимости от радиуса траектории находятся в таблице в колонках со второй до последней.

Вписанный радиус	Общее время прохождения трассы до апекса	Длина дуги, выхода из поворота после апекса	Время в повороте после апекса	Время на вход и прохождение поворота	Скорость на выходе с прямой	Время на выходной прямой	Общее время прохождения сегмента
м	сек	м	сек	сек	км/ч	сек	сек
45	11.86	0.00	0.00	11.86	174.55	5.67	17.528
46.3	10.94	18.26	0.86	11.80	172.57	5.528	17.329
46.9	10.58	25.87	1.21	11.78	171.88	5.46	17.242
47.2	10.43	28.91	1.34	11.78	171.62	5.43	17.208
48.8	9.91	41.05	1.88	11.78	170.72	5.308	17.093
51.8	9.24	58.40	2.59	11.83	169.76	5.116	16.951
54.9	8.80	72.34	3.12	11.92	169.29	4.955	16.873
57.9	8.46	84.48	3.54	12.01	169.07	4.813	16.818
61	8.19	95.82	3.92	12.11	169.00	4.682	16.787

До сих пор в этой таблице мы смотрели только на последнюю колонку. Некоторые читатели могут воскликнуть, что если нажать на газ раньше апекса можно выиграть даже больше времени. Другие закричать «тормози в повороте!», это отжатие тормоза одновременно с поворотом рулевого колеса (спасибо читателю Марку Сибилиа который указал мне на это). Пока мы оставим эти улучшения на потом.

Подход, использованный в этой главе это нахождение траектории шаг за шагом, с учетом круга сцепления и краев трассы. Это одна из техник, которую мы можем использовать в компьютерном моделировании, поэтому мы убьём двух зайцев одним выстрелом: исследуем моделирование и проанализируем определенные траектории. Для удобства, мы будем использовать Декартову систему координат, которая представляет собой квадратную сетку. Давайте вернемся к трассе.

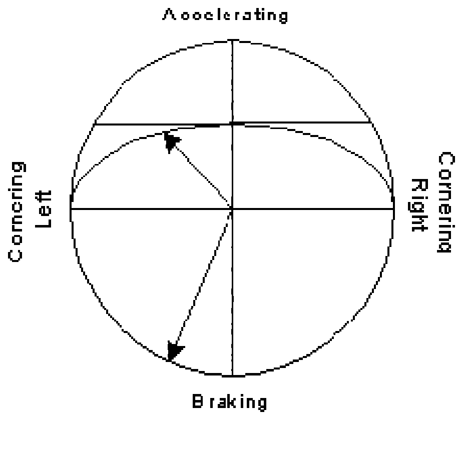
Мы будем проводить анализ измерением позиции центра масс и носа автомобиля по отношению к новой координатной системе. У нас есть цель добраться в точку x = 60, y = 200 м, за наименьшее возможное время, с направлением настолько близким к 90 градусам насколько это возможно, то есть направлением вдоль прямой. Мы начнем от апекса, с координатами $x = r0 \sin\alpha$, $y = r1 \cos\alpha$. Это показано на следующей схеме:



Я должен отметить, что как вы могли заметить, эта глава Физики Гонок более подробна, и усложнена чем предыдущая. Я просто собираюсь выдать факты без обычного подробного объяснения. Причин здесь две: в первых придется очень много объяснять и при этом сохранить маленький объем статьи и во вторых, полагаю, что если вы до сих пор читаете Физику Гонок, у вас есть достаточно желания и упорства чтобы проделать это самим. Итак, давайте начнем.

Начальное направление это тангенс внутренней кромки трека, то есть перпендикуляр к линии от центра радиуса к кромке трека (апексу). Есть угол α отклонения от горизонтальной оси x. Мы знаем начальную скорость, v0, то есть мы знаем составляющие по направлениями x и y: $v0_x = v0 \cos\alpha$, $v0_y = v0 \sin\alpha$.

Мы смоделируем маневр, таким образом, чтобы не выходить за пределы круга сцепления. Возьмем этот предел как 1g для поворотов и торможения и 0.5g для ускорения, с плавными переходами из одного в другое, как на следующей схеме (верхняя часть связана с ограничением мощности двигателя, а не с плавными переходами, что позволит нам ускорятся сильней с повернутым рулем. Также отметим, что 0,5g достаточно реальная величина, если рассматривать ускорение. Оставлю читателю рассчитать, что ускорение 0.5g позволит показать время на 402м 13 секунд, правда с нереалистичной скоростью выхода 240км/ч).



The Traction Circle

На каждом шаге расчетов мы будем фиксировать следующую информацию:

1. Время, t
2. Текущее положение, x(t), y(t), которые мы будем проверять, чтобы убедится, что машина всё ещё на трассе (x<60) и машина ещё не на финише (y>200);
3. Текущую скорость, $v_x(t)$, $v_y(t)$, которые мы будем использовать для обновления текущего положения x(t+Δt) = x(t) + v(t)* Δt, и подобно для y
4. Касательное и радиальное ускорение $a_t(t)$, $a_r(t)$, которое представляет собой касательное и радиальное к небольшому отрезку траектории в каждый момент времени, которые мы будем проверять для того чтобы убедиться что запас сцепления не превышен и не превышена мощность двигателя, то есть что $\sqrt{a_t^2 + a_r^2}$ внутри круга сцепления.
5. Ускорение в направлениях x и y, $a_x(t)$, $a_y(t)$, которые мы будем использовать для обновления текущей скорости: $v_x(t+\Delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\Delta t$, и подобно для v_y.

Мы запустим модель с нарастанием ускорения линейно за промежуток времени k, и одновременным увеличением мгновенного радиуса траектории через небольшой промежуток времени kunwind. Нажатие на газ позволит нам увеличить касательное ускорение at на каждом шаге и выпрямление руля позволит нам уменьшить радиальное ускорение ar, так чтобы мы остались внутри круга сцепления. Поскольку у нас будет центростремительная сила доступная даже при полностью нажатой педали газа, у нас будет возможность возвращать руль немного медленнее, что позволит нам оставаться на трассе, и это надо использовать по полной. Другими словами, мы должны искать решения, когда ku хотябы в два раза больше k.

Давайте посмотрим на первые несколько столбцов модели в таблице и изучим формулы, с помощью которых они получены глубже.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t	a(t) (м/с2)	v2/r (м/с2)	a(t) (м/с2)	r(t) (м)	ax(t) (м)	ay(t) (м/с2)	x(t) (м)	y(t) (м)	vx(t) (км/ч)	vy(t) (км/ч)	v (км/ч)
0	0.00	9.75	9.75	49	-6.50	7.27	20.3	-22.7	59	52	79
0.2	0.39	9.72	9.23	52	-6.46	6.60	23.4	-19.6	54	57	79
0.4	0.78	9.63	8.70	56	-6.33	6.02	26.2	-16.3	49	62	79

0.6	1.17	9.47	8.17	60	-6.11	5.54	28.8	-12.7	45	66	80
0.8	1.56	9.24	7.64	66	-5.84	5.17	31.2	-8.9	40	70	81
0.9	1.76	9.10	7.38	69	-5.69	5.02	32.2	-6.9	38	72	81
1	1.95	8.94	7.12	73	-5.53	4.89	33.3	-4.9	36	74	82

[Ряд 1]: приращение Δt на каждом ряде; на самом деле мы рассчитали всё с шагом Δt =0,05 сек, но показали здесь только каждую четвертую строку. Это независимая колонка, что означает, что она не зависит ни от одной другой колонки в этой таблице.

[Ряд 2]: касательное ускорение

$$a_t(t) = \frac{g}{2}\min\left(1, \frac{t}{k}\right),$$

Учитывает нажатие на педаль газа до ускорения 0,5g, и зависит от ряда 1.

[Ряд 3]: максимальное радиальное ускорение

$$v(t)^2 / r(t) = \sqrt{g^2 - 4a_t(t)^2},$$

Учитывает круг сцепления. Если точней, для верхней половины круга ограничивается плоской вершиной эллипса с высотой 0.5g. Зависит только от колонки 2.

[ряд 4): радиальное ускорение

$$a_r(t) = \max\left(0, \min\left(\frac{v(t)^2}{r(t)}, g\left(1 - \frac{t}{k_{\text{unwind}}}\right)\right)\right),$$

Учитывает возврат руля. Изменяется пошагово от внутреннего предела:g(1 - t / ku). Медленно увеличивается с увеличением времени, но никогда не превышает v2/r. Минимум следует кругу сцепления и никогда не бывает отрицательным, потому что мы не хотим поворачивать к входной прямой. Зависит от рядов 1 и 3.

[ряд 5]:

$$r(t) = v(t)^2 / a_r(t);$$

Рассчитано просто для интереса. Интересно посчитать мгновенный радиус круга, по которому бы мы ехали если бы не ускорялись по касательной. Зависит от рядов 4 и 12, но никакие другие ряды не зависят от этого ряда.

[Ряд 6]:

$$a_x(t) = \min\left(0, \frac{a_t v_x - a_r v_y}{v}\right),$$

Здесь просто считается x компонента радиального и касательного ускорений, но нужно убедиться, что мы никогда не поворачиваем рулевое колесо настолько, чтобы ехать влево. Отметим, что радиальное ускорение всегда пытается толкать автомобиль влево, по причине отрицательного знака (центростремительно, смотрите главу 4 Физики Гонок); зависит от рядов 2, 4, 10, 11 и 12.

[Ряд 7]:

$$a_y(t) = \min\left(0, \frac{a_t v_y + a_r v_x}{v}\right),$$

Выбор y компоненты. Указывает всегда вдоль трассы в ту сторону которую нам необходимо ехать; зависит от рядов 2,4,10,11 и 12

[Ряд 8]:

$$x(t) = x(t - \Delta t) + v_x(t)\Delta t,$$

Обновляется x координата по скорости на предыдущем шаге; зависит от рядов 8 (предыдущая строка) и 10.

[Ряд 9]:

$$y(t) = y(t - \Delta t) + v_y(t)\Delta t,$$

Делает тоже для y координаты; зависит от рядов 9 (предыдущая строка) и 11.

[Ряд 10]:

$$v_x(t) = \max(0, v_x(t - \Delta t) + a_x(t - \Delta t)\Delta t),$$

Обновляется компонента скорости по x(не может быть отрицательной); зависит от ряда 10 (предыдущая строка) и 6

[Ряд 11]:

$$v_y(t) = v_y(t - \Delta t) + a_y(t - \Delta t)\Delta t,$$

Тоже самое для y компоненты скорости по y; зависит от рядов 11 и 7.

[Ряд 12] Наконец,

$$v = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2},$$

Зависит от рядов 10 и 11.

Я заполнил лист Excel. Этот документ должен быть доступен для загрузки для читателей, которые читают электронную версию этой книги [ссылка нерабочая, прим. перев.].

Достаточно разговоров! Давайте моделировать! Это означает играть с величинами r,k и ku, и возможно даже Δt , для того чтобы найти наименьшее время прохождения при которых в рядах 8 и 9 будут величины 60 или меньше и 200 или больше соответственно. В целом, «играть с» должно быть более сложным процессом включающим поиск максимума, генетический поиск, метод имитации и другие забавные способы нахождения лучших величин. В компьютерной модели мы этого не будем делать. Тем не менее, мы можем добиться хороших результатов, просто записывая числа на листке.

Я вынужден признать, что я так и делал. Использовал интуицию, как если бы я реально был за рулем. Когда я выезжал за пределы трека, и получал цифры x>60, я стискивал зубы и краснел. Когда я всё ещё возвращал руль на финише, я чувствовал недостаточную поварачиваемость, зная, что в реальности трасса не окончится в конце сегмента.

Лучшие параметры, которые я нашел, показаны в следующей таблице.

r	k	ku	Лучшее время	Шаблонное время	Шаблонное лучшее	Лучшее найденное итоговое время
47.2	1.5	2	6.5	6.779	0.279	16.901
48.8	2.5	3.7	6.875	7.189	0.314	16.747
50.3	3	5.95	7.05	7.482	0.432	16.55
51.1	3.25	7.22	7.12	7.605	0.485	16.466
51.8	3.5	8.55	7.225	7.716	0.491	16.433
53.3	4	11.17	7.4	7.912	0.512	16.367
54.9	4.5	13.33	7.575	8.082	0.507	16.337
56.4	5	30	7.7	8.233	0.533	16.282

С радиусом 51.1, k = 3.25 и kunwind = 7.22. Это означает, что нажатие на газ займет 3.25 секунды и 7.22 секунды займет возврат руля. Есть решения с более низкими временами, но поскольку в них нам придется возвращать руль уже после сегмента, я отверг эти решения, не зная что находится за пределами нашего сегмента. Если бы был больший отрезок трассы мы бы смогли найти намного лучшие времена. Несколько удивляет что затрачивая 9 секунд на возврат руля при r = 167.5, k = 3.25, мы почти не потеряем врея и останемся на 5 метров левей внешней кромки. Даже на такой простой модели можно узнать многое.

Поскольку лучшее шаблонное время по широчайшему радиусу 16,760 а лучшее время, которое я нашел 16,466, улучшение которое мы получили одновременным ускорением и возвратом руля 0,294 секунды. Это очень значительно. Если бы прямая на выходе была длиннее, разница во времени была бы ещё больше.

Отметим что здесь не учитываются улучшения которые возможны на входе в поворот (не просто замедление)! Здесь не учитывается торможение в повороте, или другие рискованные методы входа. Это важный урок: для того чтобы ехать быстрее необязательно рисковать на входе в поворот. Фактически более безопасно и более быстро замедлится на входе. Улучшения на выходе будут зависеть от комбинации предполагаемой траектории и плавности движений.

Нет гарантий, что это лучшее возможное улучшение модели. Я нашел эти цифры ручным поиском значений. Более систематичный и алгоритмичный поиск, вероятно, даст лучшие результаты. Другими словами, я смог найти почти три десятые просто пилотируя по лучшей траектории, но не слишком сильно стараясь для поиска этой траектории. Это другой важный урок: просто пилотируя по лучшей траектории можно улучшить время без дополнительного риска, то есть, не приближаясь к пределу машины.

На будущее, мы можем начать говорить больше о рисках, позволяющих улучшить время. Мы можем рисковать, начав разгонятся до апекса, мы можем рисковать, тормозя в повороте. Эти маневры добавляют риска, поскольку повышают шансы не справится с машиной.

Описка: в главе 17 я написал «пилотируя всего на 0.3 метра шире чем минимум, возможно попасть на апекс на 15 градусов позже». Здесь должно быть «… пятнадцать градусов раньше!». Смысл здесь в том, что самая узкая траектория не имеет апекса, пока геометрически не достигнет выхода из поворота, что будет очень поздно. Описка появилась, поскольку мы привыкли говорить, что поздний апекс предпочтительней.